

10.1

Lasketaan lukujonon viisi ensimmäistä jäsentä. Lausekkeeseen $a_n = \frac{n}{n+1}$ sijoitetaan n :n arvot 1, 2, 3, 4 ja 5.

$$a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \quad \text{Sijoitetaan } n=1.$$

$$a_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3} \quad \text{Sijoitetaan } n=2.$$

$$a_3 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4} \quad \text{Sijoitetaan } n=3.$$

$$a_4 = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5} \quad \text{Sijoitetaan } n=4.$$

$$a_5 = \frac{5}{5+1} = \frac{5}{6} \quad \text{Sijoitetaan } n=5.$$

Lasketaan lukujonon 50. jäsen.

$$a_{50} = \frac{50}{50+1} = \frac{50}{51} \quad \text{Sijoitetaan } n=50.$$

Vastaus

Viisi ensimmäistä jäsentä ovat $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ ja $\frac{5}{6}$.

Viideskymmenes jäsen $a_{50} = \frac{50}{51}$.

10.2

Lasketaan lukujonon viisi ensimmäistä jäsentä. Lausekkeeseen

$a_n = 11 - 5(n - 1)$ sijoitetaan n :n arvot 1, 2, 3, 4 ja 5.

$$a_1 = 11 - 5(1 - 1) = 11 - 5 \cdot 0 = 11$$

Sijoitetaan $n = 1$.

$$a_2 = 11 - 5(2 - 1) = 11 - 5 \cdot 1 = 6$$

Sijoitetaan $n = 2$.

$$a_3 = 11 - 5(3 - 1) = 11 - 5 \cdot 2 = 1$$

Sijoitetaan $n = 3$.

$$a_4 = 11 - 5(4 - 1) = 11 - 5 \cdot 3 = -4$$

Sijoitetaan $n = 4$.

$$a_5 = 11 - 5(5 - 1) = 11 - 5 \cdot 4 = -9$$

Sijoitetaan $n = 5$.

Lasketaan lukujonon 40. jäsen.

$$a_{40} = 11 - 5(40 - 1) = 11 - 5 \cdot 39 = -184$$

Sijoitetaan $n = 40$.

Vastaus

Viisi ensimmäistä jäsentä ovat 11, 6, 1, -4 ja -9.

Neljäskymmenes jäsen $a_{40} = -184$.

10.3

- a) Luku 238 on lukujonon jäsen, jos löytyy sellainen positiivinen kokonaisluku n , jolla $a_n = 238$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan n .

$$a_n = 238$$

$$\text{Sijoitetaan } a_n = 7n - 3.$$

$$7n - 3 = 238$$

$$\text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$n \approx 34,4$$

$$\text{Luku } 34,4 \text{ ei voi olla jäsenen järjestysluku.}$$

Ratkaisu $n \approx 34,4$ ei ole positiivinen kokonaisluku, joten luku 238 ei ole lukujonon jäsen.

- b) Luku 238 on lukujonon jäsen, jos löytyy sellainen positiivinen kokonaisluku n , jolla $a_n = 238$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan n .

$$a_n = 238$$

$$\text{Sijoitetaan } a_n = n^2 - 3n.$$

$$n^2 - 3n = 238$$

$$\text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$n = -14 \text{ tai } n = 17$$

$$\text{Luku } -14 \text{ ei voi olla jäsenen järjestysluku.}$$

$$\text{Luku } 17 \text{ voi olla jäsenen järjestysluku.}$$

Ratkaisu $n = 17$ on positiivinen kokonaisluku. Luku 238 on siis lukujonon 17. jäsen: $a_{17} = 17^2 - 3 \cdot 17 = 238$.

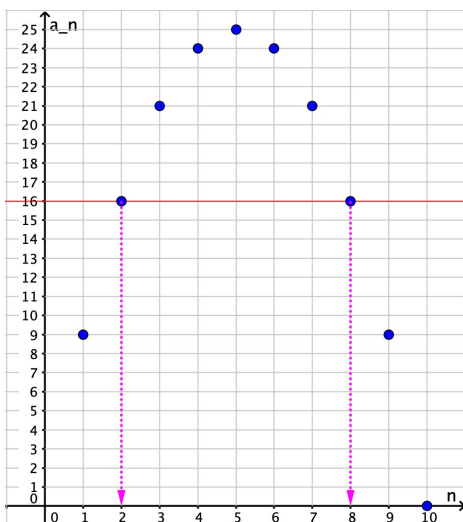
Vastaus

a) ei ole

b) on, 17. jäsen

10.4

a) Appletin perusteella luku 16 on lukujonon 2. ja 8. jäsen.



b) Luku 16 on lukujonon jäsen, jos löytyy sellainen positiivinen kokonaisluku n , jolla $a_n = 16$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan n .

$$a_n = 16$$

$$10n - n^2 = 16$$

$$n = 2 \text{ tai } n = 8$$

Sijoitetaan $a_n = 10n - n^2$.

Ratkaistaan CAS-laskimella.

Luku 2 voi olla jäsenen järjestysluku.

Luku 8 voi olla jäsenen järjestysluku.

Molemmat ratkaisut $n = 2$ ja $n = 8$ ovat positiivisia kokonaislukuja. Luku 16 on siis lukujonon 2. ja 8. jäsen.

Vastaus

On 2. ja 8. jäsen.

10.5

Lukujonon yleisen jäsenen lauseke on $a_n = \frac{1}{n}$.

a) Lasketaan 4 ensimmäisen jäsenen summa.

$$\sum_{n=1}^4 \left(\frac{1}{n} \right) = \frac{25}{12}$$

Ensimmäinen yhteenlaskettava on a_1 .

Viimeinen yhteenlaskettava on a_4 .

Yleisen jäsenen lauseke on $a_n = \frac{1}{n}$.

GeoGebra CAS-laskimella summan saa laskettua komennolla
"summa($\frac{1}{n}$, n, 1, 4)".

b) Lasketaan 12 ensimmäisen jäsenen summa.

$$\sum_{n=1}^{12} \left(\frac{1}{n} \right) = \frac{86\,021}{27\,720}$$

Ensimmäinen yhteenlaskettava on a_1 .

Viimeinen yhteenlaskettava on a_{12} .

Yleisen jäsenen lauseke on $a_n = \frac{1}{n}$.

GeoGebra CAS-laskimella summan saa laskettua komennolla
"summa($\frac{1}{n}$, n, 1, 12)".

Vastaus

a) $\frac{25}{12}$ b) $\frac{86\,021}{27\,720}$

10.6

Lukujonon yleisen jäsenen lauseke on $a_n = 5n$.

a) Lasketaan 15 ensimmäisen jäsenen summa.

$$\sum_{n=1}^{15} (5n) = 600$$

Ensimmäinen yhteenlaskettava on a_1 .

Viimeinen yhteenlaskettava on a_{15} .

Yleisen jäsenen lauseke on $a_n = 5n$.

GeoGebra CAS-laskimella summan saa laskettua komennolla
"summa(5n, n, 1, 15)".

- b) Selvitetään ensin, kuinka mones lukujonon jäsen ensimmäinen yhteenlaskettava 200 on ja kuinka mones viimeinen yhteenlaskettava 300 on.

$$\begin{array}{ll} 5n = 200 & \div 5 \\ n = 40 & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Yleisen jäsenen lauseke on } a_n = 5n. \\ \text{Luku 200 on jonon 40. jäsen.} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 5n = 300 & \div 5 \\ n = 60 & \end{array} \quad \text{Luku 300 on jonon 60. jäsen.}$$

Lasketaan summa $200 + 205 + \dots + 300$.

$$\sum_{n=40}^{60} (5n) = 5250$$

Ensimmäinen yhteenlaskettava on a_{40} .
Viimeinen yhteenlaskettava on a_{60} .
Yleisen jäsenen lauseke on $a_n = 5n$.

GeoGebra CAS-laskimella summan saa laskettua komennolla
"summa(5n, n, 40, 60)".

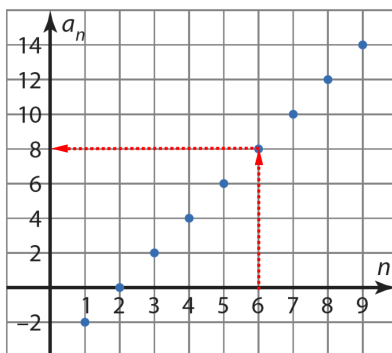
Vastaus

a) 600 b) 5250

10.7

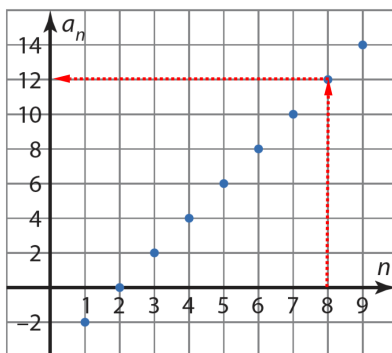
- a) Kuvan perusteella lukujonon kuudes jäsen $a_6 = 8$.

Väite on siis tosi.



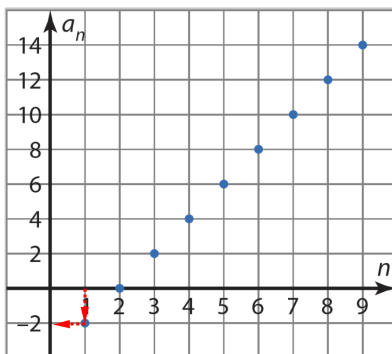
- b) Kuvan perusteella lukujonon kahdeksas jäsen $a_8 = 12$.

Väite on siis epätosi.



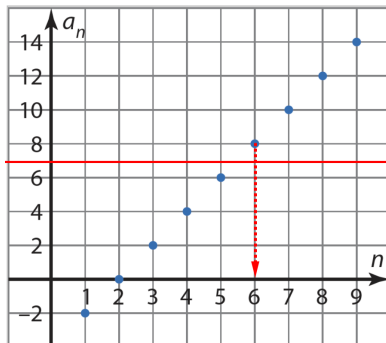
- c) Kuvan perusteella lukujonon ensimmäinen jäsen $a_1 = -2$.

Lukujonon kaikki jäsenet eivät siis ole positiivisia. Väite on epätosi.



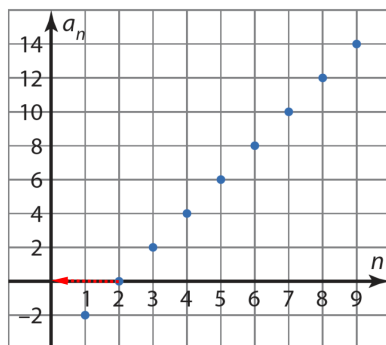
- d) Kuvan perusteella ensimmäinen lukujonon jäsen, joka on suurempi kuin 7, on lukujonon kuudes jäsen.

Väite on siis tosi.



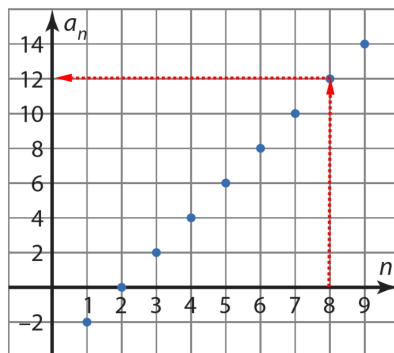
- e) Kuvan perusteella lukujonon toinen jäsen $a_2 = 0$.

Väite on siis tosi.



- f) Kuvan perusteella lukujonon kahdeksas jäsen $a_8 = 12$.

Siis $a_n = 12$, kun $n = 8$, joten väite on tosi.



Vastaus

a) tosi b) epätosi c) epätosi d) tosi e) tosi f) tosi

10.8

a) Lasketaan lukujonon ensimmäinen jäsen.

$$a_1 = 117 - 8 \cdot 1 = 109$$

Sijoitetaan $n=1$ yleisen jäsenen lausekkeeseen $a_n = 117 - 8n$.

b) Tölkkien lukumäärä kerroksessa on positiivinen kokonaisluku. Selvitetään, kuinka mones lukujonon jäsen on viimeinen positiivinen jäsen. Ratkaistaan, millä muuttujan n arvolla lukujonon jäsen on 0.

$$a_n = 0$$

$$117 - 8n = 0$$

$$n = 14,625$$

Sijoitetaan $a_n = 117 - 8n$.

Ratkaistaan CAS-laskimella.

Tölkkien lukumäärä ylemmässä kerroksessa on aina pienempi kuin edellisessä kerroksessa. Lukujonon seuraava on siis aina edellistä jäsentä pienempi. Lukujonon 14. jäsen on viimeinen positiivinen jäsen (ja 15. jäsen ensimmäinen negatiivinen jäsen).

Lasketaan ylimmän eli 14. kerroksen tölkkien lukumäärä.

$$a_{14} = 117 - 8 \cdot 14 = 5$$

Sijoitetaan $n=14$ yleisen jäsenen lausekkeeseen $a_n = 117 - 8n$.

Ylimmässä kerroksessa on 5 tölkkiä.

c) Lasketaan lukujonon 14 ensimmäisen jäsenen summa CAS-laskimella.

$$\sum_{n=1}^{14} (117 - 8n) = 798$$

Ensimmäinen yhteenlaskettava on a_1 .

Viimeinen yhteenlaskettava on a_{14} .

Yleisen jäsenen lauseke on $a_n = 117 - 8n$.

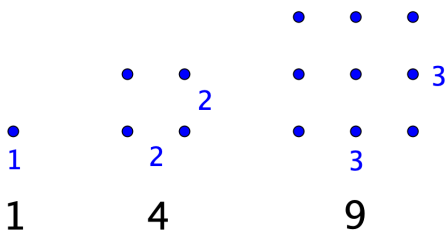
GeoGebra CAS-laskimella summan saa laskettua komennolla
"summa(117 - 8n, n, 1, 14)".

Vastaus

a) 109 b) 5 c) 798

10.9

a)



Lukujonon 1. jäsen muodostuu neliöstä, jossa on 1 piste: $a_1 = 1$.

Lukujonon 2. jäsen muodostuu neliöstä, jossa $2 \cdot 2$ pistettä: $a_2 = 2^2$.

Lukujonon 3. jäsen muodostuu neliöstä, jossa on $3 \cdot 3$ pistettä:
 $a_3 = 3^2$.

Siis lukujonon n . jäsen muodostuu neliöstä,
jossa on $n \cdot n$ pistettä: $a_n = n^2$.

Lukujonon yleisen jäsenen lauseke on $a_n = n^2$.

b) Lasketaan jonon 43. jäsen.

$$a_{43} = 43^2 = 1849$$

Sijoitetaan $n=43$ yleisen jäsenen
lausekkeeseen $a_n = n^2$.

- c) b-kohdan perusteella $a_{43} = 1849$. Siis 43. neliöluku on vuosiluku, joka on pienempi kuin syntymävuotesi. Lasketaan seuraava neliöluku eli jonon 44. jäsen.

$$a_{44} = 44^2 = 1936$$

Sijoitetaan $n = 44$ yleisen jäsenen lausekkeeseen $a_n = n^2$.

Myös 44. neliöluku on vuosiluku, joka on pienempi kuin syntymävuotesi. Lasketaan seuraava neliöluku eli jonon 45. jäsen.

$$a_{45} = 45^2 = 2025$$

Sijoitetaan $n = 45$ yleisen jäsenen lausekkeeseen $a_n = n^2$.

Havaitaan, että 45. neliöluku on suurempi kuin syntymävuotesi.

Siis 1936 on viimeinen syntymävuottasi edeltävä neliövuosiluku. Kyseinen luku on 44. neliöluku.

- d) Lasketaan lukujonon 44 ensimmäisen jäsenen summa CAS-laskimella.

$$\sum_{n=1}^{44} (n^2) = 29\,370$$

Ensimmäinen yhteenlaskettava on a_1 .

Viimeinen yhteenlaskettava on a_{44} .

Yleisen jäsenen lauseke on $a_n = n^2$.

GeoGebra CAS-laskimella summan saa laskettua komennolla "summa(n^2 , n , 1, 44)".

Vastaus

- a) $a_n = n^2$ b) $a_{43} = 1849$ c) 1936, joka on 44. neliöluku d) 29 370

10.10

- a) Lukujonon yleisen jäsenen lauseke on $a_n = (-1)^n$. Lasketaan lukujonon viisi ensimmäistä jäsentä.

$$a_1 = (-1)^1 = -1$$

$$a_2 = (-1)^2 = 1$$

$$a_3 = (-1)^3 = -1$$

$$a_4 = (-1)^4 = 1$$

$$a_5 = (-1)^5 = -1$$

Lukujonon viisi ensimmäistä jäsentä ovat $-1, 1, -1, 1$ ja -1 .

- b) Jono $-4, 4, -4, 4, \dots$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$\underbrace{-1 \cdot 4}_{a_1 = -4}, \underbrace{1 \cdot 4}_{a_2 = 4}, \underbrace{-1 \cdot 4}_{a_3 = -4}, \underbrace{1 \cdot 4}_{a_4 = 4}, \dots$$

a-kohdan perusteella jonon yleisen jäsenen lauseke on $a_n = (-1)^n \cdot 4$.

- c) Jono $0, 2, 0, 2, \dots$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$\underbrace{-1 + 1}_{a_1 = 0}, \underbrace{1 + 1}_{a_2 = 2}, \underbrace{-1 + 1}_{a_3 = 0}, \underbrace{1 + 1}_{a_4 = 2}, \dots$$

a-kohdan perusteella jonon yleisen jäsenen lauseke on $a_n = (-1)^n + 1$.

Vastaus

- a) Viisi ensimmäistä jäsentä ovat $-1, 1, -1, 1$ ja -1 .

- b) $a_n = (-1)^n \cdot 4$ c) $a_n = (-1)^n + 1$

10.11

- a) Lasketaan lukujonon viisi ensimmäistä jäsentä. Lausekkeeseen $a_n = n^2 - n$ sijoitetaan n :n arvot 1, 2, 3, 4 ja 5.

$$a_1 = 1^2 - 1 = 0$$

Sijoitetaan $n = 1$.

$$a_2 = 2^2 - 2 = 2$$

Sijoitetaan $n = 2$.

$$a_3 = 3^2 - 3 = 6$$

Sijoitetaan $n = 3$.

$$a_4 = 4^2 - 4 = 12$$

Sijoitetaan $n = 4$.

$$a_5 = 5^2 - 5 = 20$$

Sijoitetaan $n = 5$.

Lasketaan lukujonon 100. jäsen.

$$a_{100} = 100^2 - 100 = 9900 \text{ Sijoitetaan } n = 100.$$

- b) Lasketaan lukujonon viisi ensimmäistä jäsentä. Lausekkeeseen $a_n = \frac{10}{n}$ sijoitetaan n :n arvot 1, 2, 3, 4 ja 5.

$$a_1 = \frac{10}{1} = 10$$

Sijoitetaan $n = 1$.

$$a_2 = \frac{10}{2} = 5$$

Sijoitetaan $n = 2$.

$$a_3 = \frac{10}{3}$$

Sijoitetaan $n = 3$.

$$a_4 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

Sijoitetaan $n = 4$.

$$a_5 = \frac{10}{5} = 2$$

Sijoitetaan $n = 5$.

Lasketaan lukujonon 100. jäsen.

$$a_{100} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$$

Sijoitetaan $n = 100$.

Vastaus

- a) Viisi ensimmäistä jäsentä ovat 0, 2, 6, 12 ja 20.
Sadas jäsen $a_{100} = 9900$.

- b) Viisi ensimmäistä jäsentä ovat 10, 5, $\frac{10}{3}$, $\frac{5}{2}$ ja 2.

Sadas jäsen $a_{100} = \frac{1}{10}$.

10.12

- a) Luku 182 on lukujonon jäsen, jos löytyy sellainen positiivinen kokonaisluku n , jolla $a_n = 182$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan n .

$$\begin{array}{ll} a_n = 182 & \text{Sijoitetaan } a_n = 450 - 3n. \\ 450 - 3n = 182 & \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\ n \approx 89,3 \end{array}$$

Ratkaisu $n \approx 89,3$ ei ole positiivinen kokonaisluku, joten luku 182 ei ole lukujonon jäsen.

- b) Luku 182 on lukujonon jäsen, jos löytyy sellainen positiivinen kokonaisluku n , jolla $a_n = 182$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan n .

$$\begin{array}{ll} a_n = 182 & \text{Sijoitetaan } a_n = -n^2 + 24n + 102. \\ -n^2 + 24n + 102 = 182 & \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\ n = 4 \text{ tai } n = 20 \end{array}$$

Molemmat ratkaisut $n = 4$ ja $n = 20$ ovat positiivisia kokonaislukuja. Luku 182 on siis lukujonon 4. ja 20. jäsen:

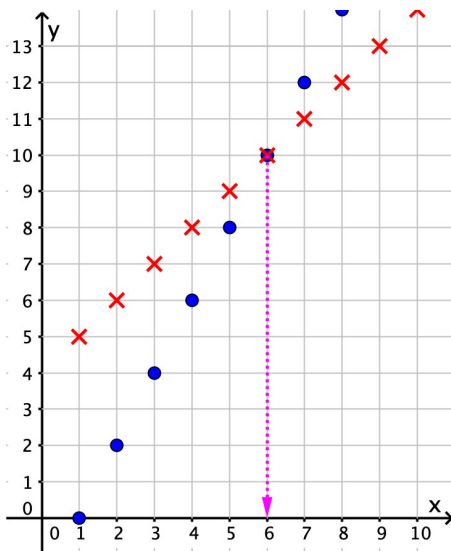
$$\begin{array}{l} a_4 = -4^2 + 14 \cdot 4 + 102 = 182 \\ a_{20} = -20^2 + 14 \cdot 20 + 102 = 182. \end{array}$$

Vastaus

- a) Ei ole.
b) On 4. ja 20. jäsen.

10.13

- a) Appletin perusteella molempien lukujonojen kuudes jäsen on sama:
 $a_6 = 10$ ja $b_6 = 10$.



- b) Merkitään lukujonojen yleisten jäsenten lausekkeet yhtä suuriksi ja ratkaistaan n .

$$\begin{aligned}
 a_n &= b_n && \text{Sijoitetaan } a_n = 2n - 2 \text{ ja } b_n = n + 4. \\
 2n - 2 &= n + 4 && \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\
 n &= 6
 \end{aligned}$$

Lukujonojen jäsenet ovat yhtä suuret, kun $n = 6$.
 Siis lukujonojen 6. jäsenet ovat yhtä suuret.

Vastaus

- a) On 6. jäsen.

10.14

Lukujonon yleisen jäsenen lauseke on $a_n = 11n$.

a) Lasketaan 20 ensimmäisen jäsenen summa.

$$\sum_{n=1}^{20} (11n) = 2310$$

Ensimmäinen yhteenlaskettava on a_1 .

Viimeinen yhteenlaskettava on a_{20} .

Yleisen jäsenen lauseke on $a_n = 11n$.

GeoGebra CAS-laskimella summan saa laskettua komennolla
"summa(11n, n, 1, 20)".

- b) Selvitetään ensin, kuinka mones lukujonon jäsen ensimmäinen yhteenlaskettava 385 on ja kuinka mones viimeinen yhteenlaskettava 1100 on.

$$\begin{array}{ll} 11n = 385 & |:11 \\ n = 35 & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Yleisen jäsenen lauseke on } a_n = 11n. \\ \text{Luku 385 on jonon 35. jäsen.} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 11n = 1100 & |:11 \\ n = 100 & \end{array} \quad \text{Luku 1100 on jonon 100. jäsen.}$$

Lasketaan summa $385 + 396 + 418 + \dots + 1100$.

$$\sum_{n=35}^{100} (11n) = 49\,005$$

Ensimmäinen yhteenlaskettava on a_{35} .

Viimeinen yhteenlaskettava on a_{100} .

Yleisen jäsenen lauseke on $a_n = 11n$.

GeoGebra CAS-laskimella summan saa laskettua komennolla
"summa(11n, n, 35, 100)".

Vastaus

a) 2310 b) 49 005

10.15

a) Lasketaan lukujonon viisi ensimmäistä jäsentä. Lausekkeeseen

$$a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2n-1} \quad \text{sijoitetaan } n:n \text{ arvot } 1, 2, 3, 4 \text{ ja } 5.$$

$$a_1 = (-1)^{1+1} \cdot \frac{1}{2 \cdot 1 - 1} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$$

Sijoitetaan $n = 1$.

$$a_2 = (-1)^{2+1} \cdot \frac{1}{2 \cdot 2 - 1} = -1 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$$

Sijoitetaan $n = 2$.

$$a_3 = (-1)^{3+1} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3 - 1} = 1 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

Sijoitetaan $n = 3$.

$$a_4 = (-1)^{4+1} \cdot \frac{1}{2 \cdot 4 - 1} = -1 \cdot \frac{1}{7} = -\frac{1}{7}$$

Sijoitetaan $n = 4$.

$$a_5 = (-1)^{5+1} \cdot \frac{1}{2 \cdot 5 - 1} = 1 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$$

Sijoitetaan $n = 5$.

b) Lasketaan kymmenen ensimmäisen jäsenen summa CAS-laskimella.

Ensimmäinen yhteenlaskettava a_1 .

Viimeinen yhteenlaskettava a_{10} .

Yleisen jäsenen lauseke on

$$\sum_{n=1}^{10} \left((-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2n-1} \right) = \frac{11\,064\,338}{14\,549\,535}$$

$$a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2n-1}.$$

GeoGebra CAS-laskimella summan saa laskettua komennolla

$$\text{"summa}((-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2n-1}, n, 1, 10)\text{"}$$

Vastaus

a) Viisi ensimmäistä jäsentä ovat $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}$ ja $\frac{1}{9}$. b) $\frac{11\,064\,338}{14\,549\,535}$

10.16

Lukujonon yleisen jäsenen lauseke on $a_n = 12n - n^2$.

a) Lasketaan lukujonon 3. jäsen.

$$a_3 = 12 \cdot 3 - 3^2 = 27$$

Sijoitetaan $n = 3$.

Väite on tosi.

b) Lasketaan lukujonon 9. jäsen.

$$a_9 = 12 \cdot 9 - 9^2 = 27$$

Sijoitetaan $n = 9$.

Väite on tosi.

c) Lasketaan lukujonon 4. jäsen.

$$a_4 = 12 \cdot 4 - 4^2 = 32$$

Sijoitetaan $n = 4$.

Lukujonon 4. jäsen on 32, joten väite on epätosi.

d) Lasketaan lukujonon 6. jäsen.

$$a_6 = 12 \cdot 6 - 6^2 = 36$$

Sijoitetaan $n = 4$.

Lukujonon 6. jäsen on 36, joten väite on tosi.

- e) Luku 20 on lukujonon jäsen, jos löytyy sellainen positiivinen kokonaisluku n , jolla $a_n = 20$. Luku 20 on kaksi kertaa lukujonon jäsenenä, jos tällaisia positiivisia kokonaislukuja löytyy kaksi kappaletta. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan n .

$$a_n = 20$$

Sijoitetaan $a_n = 12n - n^2$.

$$12n - n^2 = 20$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$n = 2 \text{ tai } n = 10$$

Molemmat ratkaisut $n = 2$ ja $n = 10$ ovat positiivisia kokonaislukuja. Luku 20 on siis lukujonon 2. ja 10. jäsen. Väite on tosi.

- f) Kokeilemalla havaitaan, että esimerkiksi lukujonon 20. jäsen on negatiivinen.

$$a_{20} = 12 \cdot 20 - 20^2 = -160$$

Sijoitetaan $n = 20$.

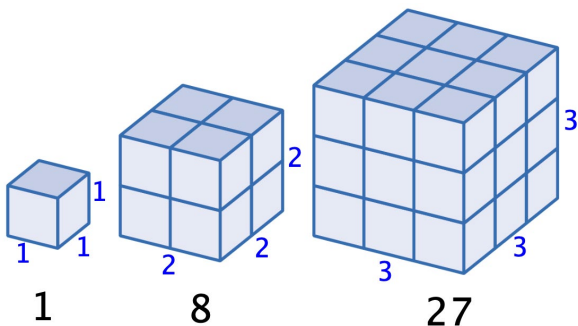
Väite on siis epätosi.

Vastaus

- a) tosi b) tosi c) epätosi d) tosi e) tosi f) epätosi

10.17

a)



Lukujonon 1. jäsen muodostuu kuutiosta, jossa on 1 pieni kuutio: $a_1 = 1$.

Lukujonon 2. jäsen muodostuu kuutiosta, jossa $2 \cdot 2 \cdot 2$ pientä kuutiota: $a_2 = 2^3 (= 8)$.

Lukujonon 3. jäsen muodostuu kuutiosta, jossa on $3 \cdot 3 \cdot 3$ pientä kuutiota: $a_3 = 3^3 (= 27)$.

Sii lukujonon n . jäsen muodostuu kuutiosta, jossa on $n \cdot n \cdot n$ pientä kuutiota: $a_n = n^3$.

Lukujonon yleisen jäsenen lauseke on $a_n = n^3$.

b) Lasketaan jonon 9. jäsen.

$$a_9 = 9^3 = 729$$

Sijoitetaan $n = 9$ yleisen jäsenen lausekkeeseen $a_n = n^3$.

- c) Selvitetään ensin, kuinka mones kuutioluku on viimeinen, joka on syntymävuottasi pienempi.

b-kohdan perusteella $a_9 = 729$. Siis 9. kuutioluku on vuosiluku, joka on pienempi kuin syntymävuotesi. Lasketaan kuutiolukuja, kunnes saadaan luku, joka on isompi kuin syntymävuotesi.

$$a_{10} = 10^3 = 1000 \quad a_{10} \text{ on pienempi kuin syntymävuotesi.}$$

$$a_{11} = 11^3 = 1331 \quad a_{11} \text{ on pienempi kuin syntymävuotesi.}$$

$$a_{12} = 12^3 = 1728 \quad a_{12} \text{ on pienempi kuin syntymävuotesi.}$$

$$a_{13} = 13^3 = 2197 \quad a_{13} \text{ on suurempi kuin syntymävuotesi.}$$

Siis 12. kuutioluku on viimeinen, joka on pienempi kuin syntymävuotesi. Lasketaan lukujonon 12 ensimmäisen jäsenen summa CAS-laskimella.

$$\sum_{n=1}^{12} (n^3) = 6084$$

Ensimmäinen yhteenlaskettava on a_1 .

Viimeinen yhteenlaskettava on a_{12} .

Yleisen jäsenen lauseke on $a_n = n^3$.

GeoGebra CAS-laskimella summan saa laskettua komennolla
"summa(n^3 , n , 1, 12)".

Vastaus

a) $a_n = n^3$ b) $a_9 = 729$ c) 6084

10.18

a) Lasketaan lukujonon viisi ensimmäistä jäsentä. Lausekkeeseen

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{ sijoitetaan } n:n \text{ arvot } 1, 2, 3, 4 \text{ ja } 5.$$

$$a_1 = \frac{(-1)^{1+1}}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

Sijoitetaan $n = 1$.

$$a_2 = \frac{(-1)^{2+1}}{2} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Sijoitetaan $n = 2$.

$$a_3 = \frac{(-1)^{3+1}}{3} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Sijoitetaan $n = 3$.

$$a_4 = \frac{(-1)^{4+1}}{4} = \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4}$$

Sijoitetaan $n = 4$.

$$a_5 = \frac{(-1)^{5+1}}{5} = \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

Sijoitetaan $n = 5$.

Lasketaan lukujonon sadas jäsen.

$$a_{100} = \frac{(-1)^{100+1}}{100} = \frac{-1}{100} = -\frac{1}{100}$$

Sijoitetaan $n = 100$.

- b) Lasketaan lukujonon viisi ensimmäistä jäsentä. Lausekkeeseen $a_n = (-1)^n + (-1)^{n+1}$ sijoitetaan n :n arvot 1, 2, 3, 4 ja 5.

$$a_1 = (-1)^1 + (-1)^{1+1} = -1 + 1 = 0$$

Sijoitetaan $n = 1$.

$$a_2 = (-1)^2 + (-1)^{2+1} = 1 - 1 = 0$$

Sijoitetaan $n = 2$.

$$a_3 = (-1)^3 + (-1)^{3+1} = -1 + 1 = 0$$

Sijoitetaan $n = 3$.

$$a_4 = (-1)^4 + (-1)^{4+1} = 1 - 1 = 0$$

Sijoitetaan $n = 4$.

$$a_5 = (-1)^5 + (-1)^{5+1} = -1 + 1 = 0$$

Sijoitetaan $n = 5$.

Lasketaan lukujonon sadas jäsen.

$$a_{100} = (-1)^{100} + (-1)^{100+1} = 1 - 1 = 0$$

Sijoitetaan $n = 100$.

Vastaus

- a) Viisi ensimmäistä jäsentä ovat $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}$ ja $\frac{1}{5}$.

$$\text{Sadas jäsen } a_{100} = -\frac{1}{100}$$

- b) Viisi ensimmäistä jäsentä ovat $0, 0, 0, 0$ ja 0 .

$$\text{Sadas jäsen } a_{100} = 0.$$

10.19

a) Lukujonon $-1, 1, -1, 1, \dots$ yleisen jäsenen lauseke on $b_n = (-1)^n$.

$$b_1 = (-1)^1 = -1$$

$$b_2 = (-1)^2 = 1$$

$$b_3 = (-1)^3 = -1$$

$$b_4 = (-1)^4 = 1$$

\vdots

Lukujono $-3, 3, -3, 3, \dots$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$\underbrace{-1 \cdot 3}_{a_1 = -3}, \underbrace{1 \cdot 3}_{a_2 = 3}, \underbrace{-1 \cdot 3}_{a_3 = -3}, \underbrace{1 \cdot 3}_{a_4 = 3}, \dots$$

Täten jonon yleisen jäsenen lauseke on $a_n = (-1)^n \cdot 3$.

b) Lukujono $-1, 5, -1, 5, \dots$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$\underbrace{-1 \cdot 3 + 2}_{a_1 = -1}, \underbrace{1 \cdot 3 + 2}_{a_2 = 5}, \underbrace{-1 \cdot 3 + 2}_{a_3 = -1}, \underbrace{1 \cdot 3 + 2}_{a_4 = 5}, \dots$$

Täten jonon yleisen jäsenen lauseke on $a_n = (-1)^n \cdot 3 + 2$.

Vastaus

a) $a_n = (-1)^n \cdot 3$

b) $a_n = (-1)^n \cdot 3 + 2$

10.20

- a) Lukujonon yleisen jäsenen lauseke on $a_n = 2n$. Lasketaan lukujonon viisi ensimmäistä jäsentä.

$$a_1 = 2 \cdot 1 = 2$$

$$a_2 = 2 \cdot 2 = 4$$

$$a_3 = 2 \cdot 3 = 6$$

$$a_4 = 2 \cdot 4 = 8$$

$$a_5 = 2 \cdot 5 = 10$$

Lukujonon viisi ensimmäistä jäsentä ovat 2, 4, 6, 8 ja 10.

- b) Jono 1, 3, 5, 6, 9, ... voidaan kirjoittaa muodossa

$$\underbrace{2-1}_{a_1=1}, \underbrace{4-1}_{a_2=3}, \underbrace{6-1}_{a_3=5}, \underbrace{8-1}_{a_4=7}, \underbrace{10-1}_{a_5=9}, \dots$$

a-kohdan perusteella jonon yleisen jäsenen lauseke on $a_n = 2n - 1$.

- c) Lasketaan lukujonon $a_n = 2n - 1$ viidenkymmenen ensimmäisen jäsenen summa.

$$\sum_{n=1}^{50} (2n - 1) = 2500$$

Ensimmäinen yhteenlaskettava on a_1 .

Viimeinen yhteenlaskettava on a_{50} .

Yleisen jäsenen lauseke on $a_n = 2n - 1$.

GeoGebra CAS-laskimella summan saa laskettua komennolla "summa(2n - 1, n, 1, 50)".

Vastaus

- a) Viisi ensimmäistä jäsentä ovat 2, 4, 6, 8 ja 10

b) $a_n = 2n - 1$

c) 2500

10.21

Valkoisessa solussa oleva luku saadaan laskemalla yhteen edellisellä rivillä olevat luvut vasemmasta reunasta kyseisen sarakkeen kohdalle saakka.

Viimeinen rivin luku saadaan laskemalla yhteen kaikki edellisen rivin luvut eli luku on sama kuin rivin toiseksi viimeinen luku.

1						
1	1					
1	$1+1=2$	2				
1	$1+2=3$	$1+2+2=5$	5			
	$1+2=4$	$=1+3+5=9$	$1+3+5+5=14$	14		
1	$1+4=5$	$1+4+9=14$	$1+4+9+14=28$	$1+4+9+14+14=42$	42	
	$1+5=6$	$1+5+14=20$	$1+5+14+28=48$	$1+5+14+28+42=90$	$1+5+14+28+42+42=132$	132

Lukujono on siis 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, Täten lukujonon kolme seuraavaa jäsentä ovat 14, 42 ja 132.

Vastaus

14, 42 ja 132